PENERAPAN TEORI ANTREAN UNTUK MENGOPTIMALKAN MANAJEMEN *EXCESS RESERVES* PADA BANK

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika

Oleh
YASIRLANNA YAHYA
145090400111018

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENERAPAN TEORI ANTREAN UNTUK MENGOPTIMALKAN MANAJEMEN *EXCESS RESERVES* PADA BANK

oleh:
YASIRLANNA YAHYA
145090400111018

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika

Pembimbing

Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si
NIP. 196611121991032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Yasirlanna Yahya**
NIM	**: 145090400111018**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Penerapan Teori Antrean untuk Mengoptimalkan Manajemen *Excess Reserves* pada Bank**

dengan ini menyatakan bahwa:

1. **isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam skripsi ini hanya sebagai referensi.**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 12 Oktober 2018
yang menyatakan,

Yasirlanna Yahya
NIM 145090400111018

PENERAPAN TEORI ANTREAN UNTUK MENGOPTIMALKAN MANAJEMEN *EXCESS RESERVES* PADA BANK

ABSTRAK

Efisiensi pengelolahan cadangan perbankan merupakan aspek yang terpenting untuk mewujudkan kinerja keuangan yang sehat. Bank akan menghadapi *trade-off* ketika memutuskan tingkat cadangan berlebih. Semakin banyak *excess reserves*, maka semakin sedikit risiko kebangkrutan bank tetapi ini juga berarti keuntungan dalam hal pinjaman lebih rendah. Sehingga harus ditentukan cadangan dana yang yang optimal untuk memperoleh keuntungan yang maksimal. Dalam kasus ini biasanya ditangani dengan menggunakan model ekonometrik. Sedangkan, pada penelitian ini digunakan model antrean *M/M/C/C* (Erlang-B) dan *M/M/C/∞* (Erlang-C) yang mempertimbangkan banyaknya pelanggan yang terblokir terhadap cadangan dana bank untuk memperoleh *excess reserves* yang optimal. Model antrean *M/M/C/C* dan *M/M/C/∞* merupakan sistem antrean dengan laju kedatangan berdistribusi Poisson, waktu antar kedatangan serta waktu pelayanan berdistribusi eksponensial, dan memiliki *c server* untuk antrean *M/M/C/C* dan tak hingga *server* untuk antrean *M/M/C/∞* . Hasil implementasi dari model antrean Erlang-B diperoleh *excess reserves* yang optimal yaitu 85.097.250 rupiah dengan jumlah *loans* yang optimal yaitu 502.693.924 rupiah, pada model antrean Erlang-C diperoleh *excess reserves* yang optimal yaitu 86,245,740 rupiah serta dengan memutuskan bahwa tidak lebih dari 10% pelanggan menunggu lebih dari 15 menit diperoleh probabilitasnya yaitu 0.00854.

Kata Kunci: *Excess Reserves Pada Bank, Teori Antrean.*

APPLICATION OF THE QUEUE THEORY TO THE OPTIMAL MANAGEMENT OF BANK EXCESS RESERVES

ABSTRACT

The efficiency of banking reserve management is the most important aspect to realize good financial performance. The bank will face a trade-off when deciding the level of excess reserves. The more excess reserves, the less risk of bank bankruptcy, but this also means lower profit in terms of loans. So that the optimal reserve of funds must be determined to get maximum profit. In this study it is usually handled using an econometric model. While, in this study the queue models *M/M/C/C* (Erlang-B) and *M/M/C/∞* (Erlang-C) are used which consider the number of blocked customers to bank reserves to obtain optimal excess reserve. The queue model of *M/M/C/C* and *M/M/C/∞* is the queue system with the arrival rate of Poisson distribution, the time between arrivals and the service time is exponentially distributed, and has a *c* server to queue *M/M/C/C* and countless server for the *M/M/C/∞* queue. The implementation results of the Erlang-B queue model obtained optimal excess reserve of 85,097,250 rupiahs with an optimal loan amount of 502,693,924 rupiahs, in the Erlang-C queue model, the optimal excess reserves were 86,245,740 rupiahs and decided that no more than 10% the customer waits for more than 15 minutes, the probability is 0.00854.

Keywords: *Bank excess reserve, Queue Theory.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas kehendakNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Penerapan Teori Antrean untuk Mengoptimalkan Manajemen *Excess Reserves* pada Bank ini tepat pada waktunya. Skripsi ini merupakan syarat kelulusan dalam memperoleh gelar sarjana di Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan, bantuan, dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikankan terimakasih kepada:

1. Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan, dan mendorong penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Prof.Dr.Agus Widodo,M.Kes., dan Drs. Imam Nurhadi Purwanto, MT., selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan, kritik, saran dan juga motivasi bagi penulis, sehingga skripsi ini dapat selesai tepat waktu.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Brawijaya dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika.
5. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Pudji Harnowo (Ayah), Rustiningsih (Ibu), dan seluruh keluarga besar atas segala doa, bantuan, dan motivasi yang tak pernah habis diberikan.
7. Keluarga besar Matematika UB 2014 atas kebersamaan, perjuangan, dukungan, kerjasama, dan semangat selama ini.

Semoga Tuhan YME memberikan anugerah dan rahmat-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang dapat disampaikan melalui email yasirlanna76@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 12 Oktober 2018

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

λ	=	Rata-rata tingkat kedatangan/jam
μ	=	Rata-rata tingkat pelayanan/jam
ω	=	Rata-rata penarikan uang tunai pada bank
γL	=	Jumlah total cadangan uang tunai di bank
ρ	=	*Traffic intensity*
λ_U	=	Laju penarikan untuk semua pengguna/*server*
A	=	Jumlah arus kas untuk semua pengguna
A_U	=	Jumlah arus kas untuk untuk satu pengguna
H	=	Rata-rata waktu penarikan/deposit $(1/\mu)$
L_q	=	Jumlah rata-rata pelanggan dalam antrean
L_s	=	Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem
P_{ij}	=	Probabilitas untuk melakukan transisi ke *state j* setelah satu interval waktu tertentu dimana *state i* merupakan awal dari satu interval waktu.
P_n	=	Probabilitas terdapat *n* pelanggan dalam sistem
P_o	=	Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem
U	=	Jumlah total nasabah
W_q	=	Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam antrean
W_s	=	Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam sistem

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perbankan memiliki peranan penting dalam mendukung sistem perekonomian suatu bangsa. Kondisi keuangan perbankan yang stabil dapat memberikan pengaruh positif terhadap perekonomian suatu bangsa. Perbankan merupakan industri yang mengalami berbagai macam risiko dalam menjalankan kegiatan perbankan. Risiko-risiko ini berkaitan dengan usaha perbankan yang pada dasarnya bertujuan menghimpun dana dari masyarakat dalam bentuk simpanan dan mengembangkan dana tersebut untuk memperoleh keuntungan (Sigit Triandaru dan Totok Budisantoso, 2006).

Kinerja individual bank maupun sistem perbankan secara keseluruhan sangat ditentukan oleh perilaku bank yaitu dalam mengelolah aset (penempatan dana) dan liabilitas (penghimpunan dana). Pengelolaan aset dan liabilitas bertujuan memperoleh keuntungan dan meningkatkan nilai perusahaan dalam batasan tertentu. Batasan tersebut mencakup tingkat likuiditas yang mencukupi, risiko yang rendah, dan (ekuitas) modal yang mencukupi. Dengan demikian, pengelolaan aset dan liabilitas memiliki keterkaitan yang erat dengan likuiditas bank.

Pengukuran efisiensi perbankan merupakan acuan bagi para manajer dan para pengambil keputusan untuk memperkecil tingkat risiko dalam meningkatkan kinerja bank. Efisiensi pengelolahan e*xcess reserves* pada bank merupakan aspek yang terpenting untuk mewujudkan kinerja keuangan yang sehat dan berkelanjutan (*sustainable*). Cadangan dana bank yang diselenggarakan oleh lembaga penyimpanan, dapat digunakan untuk memenuhi persyaratan cadangan hukum lembaga. Dana ini digunakan sebagai saldo deposito di Bank Sentral atau sebagai uang tunai di lemari besi bank. Cadangan yang diterapkan terhadap persyaratan hukum lembaga ini yang disebut cadangan wajib, sementara jika ada cadangan tambahan disebut *excess reserves*.

Bank akan menghadapi *trade-off* ketika memutuskan tingkat *excess reserves*(kelebihan cadangan). Semakin banyak *excess reserves* maka semakin sedikit risiko kebangkrutan dalam kasus bank, tetapi ini juga berarti keuntungan dalam hal pinjaman lebih rendah. Dalam kasus ini biasanya ditangani dengan menggunakan metode ekonometrik seperti yang telah diteliti oleh Anil Talasli dengan penelitian yang berjudul "*The demand for excess reserves in Turkey*".

Teori antrean pada umumnya banyak diaplikasikan pada telekomunikasi dan rekayasa lalu lintas tetapi, sejauh ini belum banyak diterapkan untuk masalah ekonomi dan keuangan. Oleh karena itu, pada penelitian ini digunakan model antrean untuk mengoptimasi *excess reserves* pada bank.

Dalam skripsi ini dibahas model antrean *M/M/C/C* dan *M/M/C/∞* yang mempertimbangkan banyaknya pelanggan yang terblokir terhadap cadangan dana bank untuk memperoleh *excess reserves* yang optimal. Pada skripsi ini mengulas kembali *paper* dari Cleiton Taufemback dan Sergio Da Silva (2012) "*Queuing Theory Applied To The Optimal Management Of Bank Excess Reserves*" dan akan diberikan ilustrasi numerik untuk lebih memudahkan dalam pemahaman model .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana memperoleh model antrean dengan jumlah pelanggan yang terbatas (*M/M/C/C*) dan tidak terbatas (*M/M/C/∞*).
2. Bagaimana hasil penerapan model antrean untuk memperoleh *excess reserves* yang optimal pada bank.

1.3 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini dapat diberikan batasan masalah yaitu:

1. Proses kedatangan bersifat acak (random).
2. Ekuitas (modal) telah dihilangkan dari liabilitas (kewajiban) karena difokuskan pada likuiditas, yaitu manajemen *excess reserves*.
3. Tidak mempertimbangkan kemungkinan kepailitan.

1.4 Tujuan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk:

1. Memperoleh model antrean dengan jumlah pelanggan yang terbatas (*M/M/C/C*) dan tidak terbatas (*M/M/C/*∞).
2. Mengetahui hasil penerapan model antrean untuk memperoleh *excess reserves* yang optimal pada bank.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Probabilitas

Probabilitas merupakan peluang bahwa sesuatu akan terjadi. Probabilitas kejadian A dapat diartikan $P(A)$ dengan syarat $0 \leq P(A) \leq 1$. Dalam probabilitas terdapat kejadian yang saling lepas. Kejadian tersebut tidak dapat terjadi bersama-sama misalkan A terjadi, maka kejadian B tidak akan terjadi. Jika dua kejadian A dan B saling lepas, maka dalam aturan penjumlahan menyatakan bahwa probabilitas terjadinya A atau B sama dengan penjumlahan dari masing masing nilai probabilitasnya. Rumus kejadian $A_{1,}A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_k$ yang saling lepas dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(\, A_2) + \cdots + P(A_k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \qquad (2.1)$$

(Supranto,2008)

2.2 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson diperkenalkan pertama kali oleh Siméon-Denis Poisson (1781–1840) karyanya memfokuskan peubah acak *N* untuk menghitung jumlah kejadian diskrit (kadang juga disebut "kedatangan") yang terjadi selama interval waktu tertentu. Syarat-syarat kedatangan dalam kehidupan sehari hari yang berdistribusi Poisson adalah:

1. Proses kedatangan bersifat acak (random), jika hal ini terpenuhi maka kemungkinan besar pola kedatangan mengikuti distribusi poisson.
2. Rata rata kedatangan tiap interval waktu sudah diketahui dari pengamatan sebelumnya.
3. Apabila interval waktu dibagi kedalam interval yang lebih kecil maka pernyataan-pernyataan yang harus dipenuhi adalah:
   a. Peluang tepat satu kedatangan bersifat konstan.
   b. Peluang dua kedatangan atau lebih selama interval waktu tersebut angkanya sangat kecil sehingga mendekati nol.

c. Jumlah kedatangan pada interval waktu tersebut tidak bergantung pada kedatangan di interval waktu sebelum dan sesudahnya.

Apabila nilai harapan kejadian pada suatu interval adalah λ, maka probabilitas tepat terjadinya x kedatangan dalam distribusi Poisson dapat diketahui dengan menggunakan rumus:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

dengan x adalah bilangan bulat positif dan λ adalah bilangan riil positif.

Keterangan:

x = variabel acak diskrit yang menyatakan banyaknya kedatangan per interval waktu (nilai harapan $x = 0,1,2,3,\ldots$).

λ = rata-rata jumlah terjadinya x tiap interval waktu.

e = 2,718281828.

(Aminudin,2005)

2.3 Distribusi Eksponensial

Data waktu pelayanan dalam proses antrean juga sesuai dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Apabila waktu pelayanan mengikuti proses Poisson maka asumsi yang digunakan adalah distribusi eksponensial. Sedangkan menurut Taha (1997), jika interval waktu antara beberapa kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah Poisson. Probabilitas terdapat waktu pelayanan sebesar t dalam distribusi eksponensial dapat diketahui dengan rumus:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t} \text{ dengan } t \geq 0.$$

Keterangan:

t = waktu pelayanan (variabel acak kontinu).

μ = rata-rata tingkat pelayanan (unit pelayanan per unit waktu).

e = 2,718281828.

(Aminudin,2005)

2.4 Teori Antrean (*Queueing Theory*)

Analisis antrean pertama kali diperkenalkan oleh A.K. Erlang (1913) yang mempelajari fluktuasi permintaan fasilitas telepon dan keterlambatan pelayanannya. Analisis antrean banyak diterapkan di bidang bisnis (bank, supermarket), industri (palayanan mesin otomatis), transportasi (pelabuhan udara, pelabuhan laut, jasa-jasa pos) dan lain-lain. Analisis antrean memberikan informasi probabilitas dinamakan *operation characteristics*, yang dapat membantu pengambil keputusan dalam merancang fasilitas pelayanan antrean untuk mengatasi permintaan pelayanan yang fluktuatif secara acak dan menjaga keseimbangan antara biaya pelayanan dan biaya menunggu.

(Mulyono,2017)

2.5 Komponen Proses Antrean

Komponen dasar proses antrean adalah kedatangan, pelayanan dan antre. Komponen-komponen ini disajikan pada Gambar 2.1.

Gambar 2.1 Komponen proses antrean

2.5.1 Kedatangan

Setiap masalah antrean melibatkan kedatangan, misalnya orang, mobil, atau panggilan telepon untuk dilayani. Unsur ini sering disebut proses *input*. Proses *input* meliputi sumber kedatangan atau biasa dinamakan *calling population*, dan cara terjadinya kedatangan yang umumnya merupakan proses random.

2.5.2 *Server*

Server atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih fasilitas pelayanan. Contohnya pada sebuah *check out counter* dari suatu supermarket terkadang hanya ada seorang kasir, tetapi bisa juga diisi seorang kasir dengan karyawan lainnya untuk memasukkan barang-barang ke kantong plastik. Sebuah bank dapat mempekerjakan seorang atau banyak *teller*. Di samping itu, perlu diketahui cara pelayanan diselesaikan, yang kadang-kadang merupakan proses random.

2.5.3 Antre

Inti dari analisis antrean adalah antre itu sendiri. Timbulnya antrean terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Penentu antrean lain yang penting adalah disiplin antre. Disiplin antre adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pengantre, Jika tak ada antrean berarti terdapat *server* yang menganggur atau kelebihan fasilitas pelayanan.

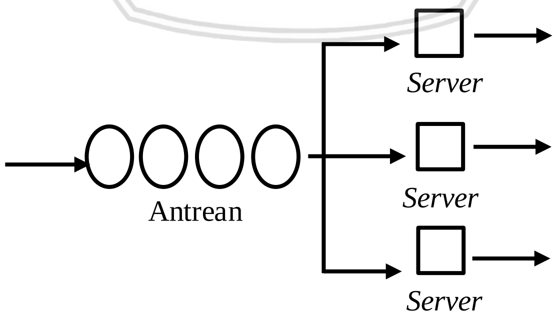
2.6 STRUKTUR DASAR PROSES ANTREAN

Berdasarkan susunan *channel*, proses antrean pada umumnya dikelompokkan ke dalam empat struktur dasar menurut sifat-sifat fasilitas pelayanan, yaitu:

1. *Single channel single phase* (Satu *server* satu tahap), yaitu sistem antrean satu jalur pelayanan dengan satu tahapan pelayanan.

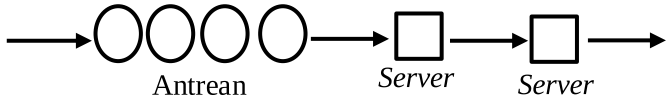
Gambar 2.2 Model antrean *single channel single phase*

2. *Multi channel single phase* (Banyak *server* satu tahap), yaitu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih jalur pelayanan dengan satu tahapan pelayanan.



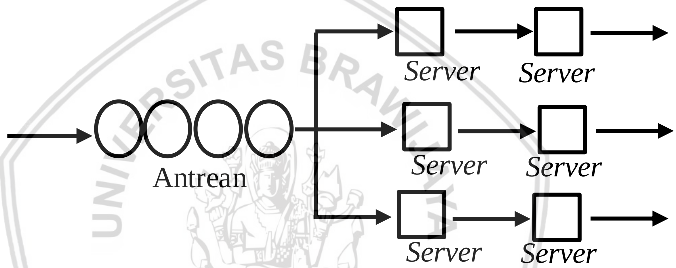
Gambar 2.3 Model antrean *multi channel single phase*

3. *Single channel multi phase* (Satu *server* Banyak tahap), yaitu sistem antrean satu jalur pelayanan dengan dua atau lebih tahapan pelayanan.



Gambar 2.4 Model antrean *single channel multi phase*

4. *Multi channel multi phase* (Banyak *server* banyak tahap), yaitu sistem antrean yang memiliki dua atau lebih jalur dan tahapan pelayanan.



Gambar 2.5 Model antrean *multi channel multi phase*
(Heizer dan Render,2004)

2.7 Disiplin Antrean

Disiplin antrean menunjukkan pedoman keputusan yang digunakan untuk menyeleksi individu-individu yang memasuki antrean untuk dilayani terlebih dahulu (prioritas). Disiplin antrean yang paling umum adalah pedoman *First Come First Served* (FCFS), yang pertama kali datang pertama kali dilayani. Tetapi bagaimanapun juga ada beberapa tipe disiplin antrean lainnya yang dapat termasuk dalam model-model matematis antrean. Menurut Taha (2007), ada 4 bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek, yaitu:

1. *First Come First Served* (FCFS) atau *First In First Out* (FIFO), artinya lebih dahulu datang (sampai) lebih dahulu dilayani. Misalnya antre membeli tiket bioskop.

2. *Last Come First Served* (LCFS) atau *Last In First Out* (LIFO), artinya yang tiba terakhir yang lebih dahulu keluar. Misalnya, sistem antrean dalam elevator (*lift*) untuk lantai yang sama, atau sistem bongkar muat barang.
3. *Service In Random Order* (SIRO), artinya panggilan didasarkan pada peluang secara *random*.
4. *Priority Service* (PS), artinya prioritas pelayanan diberikan kepada yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini kemungkinan disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang dengan keadaan penyakit lebih berat dibanding dengan orang lain dalam suatu tempat praktek dokter.

(Taha,2007)

2.8 Notasi Kendall-Lee

Karakteristik model antrean dikelompokkan dalam bentuk notasi. Notasi baku tersebut dijabarkan dan dirancang oleh D.G Kendall pada tahun 1953 dalam bentuk (*a/b/c*), yang dikenal sebagai notasi Kendall. Pada tahun 1966 A.M. Lee menambahkan simbol d dan e pada notasi Kendall tersebut, kemudian ditambahkan simbol f kedalam notasi ini yang mewakili kapasitas sumber pemanggilan. Sehingga notasi ini biasa disebut notasi Kendall-Lee dibakukan dalam bentuk sebagai berikut:

$$(a/b/c)\ ;\ (d/e/f).$$

Simbol-simbol *a,b,c,d,e,* dan f adalah unsur-unsur dasar dari model antrean ini dengan keterangan sebagai berikut:

a = distibusi kedatangan,
b = distribusi waktu pelayanan, (keberangkatan),
c = jumlah fasilitas pelayanan ($c = 1,2, \dots\dots, \infty$),
d = peraturan pelayanan (misalnya, FCFS, LCFS, SIRO),
e = jumlah maksimum yang diijinkan dalam sistem (dalam antrean dan pelayanan), dan
f = ukuran sumber pemanggilan.

Notasi standar untuk simbol a dan b sebagai distribusi kedatangan dan waktu pelayanan mempunyai kode sebagai berikut:

M	=	distibusi kedatangan atau keberangkatan poisson (atau Markov, atau distribusi waktu antar kedatang atau waktu pelayanan eksponsial yang setara),
D	=	waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan yang konstan atau deterministik,
E_k	=	distribusi Erlang atau Gamma dari distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter k,
Gl	=	distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan),
G	=	distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu kedatangan).

(Taha,1997)

2.9 Karakteristik Sistem Antrean

Karakteristik dari suatu sistem antrean dinyatakan dalam notasi-notasi berikut.

1. Probabilitas dalam sistem
   P_n adalah probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem, sedangkan P_0 adalah probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem.
2. Parameter utama
   Parameter utama dalam antrean adalah kedatangan dan pelayanan. Rata-rata tingkat kedatangan per satuan waktu dilambangkan dengan λ, sedangkan rata-rata tingkat pelayanan per satuan waktu dilambangkan dengan μ. Tingkat kedatangan dan pelayanan terjadi secara acak.
3. Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem
   Jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem dilambangkan dengan L_s, yaitu hubungan antara jumlah pelanggan yang mengantre (μ) dan berbagai probabilitas yang terjadi seluruhnya. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n.$$

4. Jumlah rata-rata pelanggan dalam antrean
   Jumlah rata-rata pelanggan dalam antrean dilambangkan dengan L_q, yaitu selisih antara jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem dan rata-rata tingkat kedatangan dibanding dengan rata-rata tingkat pelayanan. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut.
   $$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu}.$$
5. Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam sistem
   Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam sistem dilambangkan dengan W_s, yaitu hubungan antara banyaknya pelanggan dalam sistem dibandingkan dengan rata-rata tingkat kedatangan pelanggan. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut.
   $$W_s = \frac{L_s}{\lambda}.$$
6. Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam antrean
   Rata-rata waktu menunggu pelanggan dalam antrean dilambangkan dengan W_q, yaitu hubungan antara banyaknya pelanggan dalam antrean dibandingkan dengan rata-rata tingkat kedatangan pelanggan dan dapat dinyatakan sebagai berikut.
   $$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

(Taha ,2007)

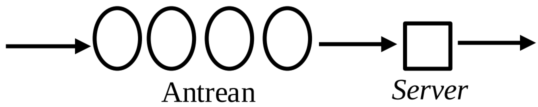
2.10 Macam-Macam Model Antrean

Dalam antrean terdapat berbagai macam model antrean tergantung keadaan dari antrean tersebut. Setiap model dijabarkan berdasarkan bentuk notasi Kendall. Berikut diberikan beberapa contoh model antrean.

2.10.1 Antrean Satu *Server* Satu Tahap [*M/M/1*]

Model ini adalah model pelayanan tunggal tanpa batas kapasitas, baik dari kapasitas sistem tersebut maupun kapasitas sumber pemanggilan. Model antrean *M/M/1* akan berlaku dengan asumsi sebagai berikut:

1. *M* adalah waktu antar kedatangan yang berdistribusi eksponensial (Proses Poisson),
2. *M* adalah waktu pelayanan yang didistribusikan secara eksponensial, dan
3. *1* adalah terdapat 1 *server* dalam antrian.



Gambar 2.6 Antrean Satu *Server* Satu Tahap

Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak berpengaruh pada jumlah kedatangan dalam sistem tersebut, yaitu $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n. Demikian pula diasumsikan bahwa pelayanan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu $\mu_n = \mu$ untuk semua n. Untuk menentukan *operating characteristics* atau ciri-ciri operasi, dapat dilakukan setelah diperoleh probabilitas n pengantre dalam sistem (P_n). Melalui penurunan matematik dalam kondisi *steady state* dapat ditunjukkan bahwa:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n ,$$

dimana $n = 0,1,2, \ldots$ dan $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \leq 1$. Bedasarkan dari rumus tersebut dapat diperoleh karakteristik antrean sebagai berikut:

1. Probabilitas terdapat k atau lebih pengantre dalam sistem adalah $P_{n \geq k} = \rho^k$
2. Rata-rata banyaknya pengantre dalam sistem

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

3. Rata-rata banyaknya pengantre yang sedang antre

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

4. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

5. Rata-rata waktu antre

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

6. Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

$$P_0 = 1 - \rho$$

(Mulyono,2017)

2.10.2 Antrean Banyak *Server* Satu Tahap [*M/M/C*]

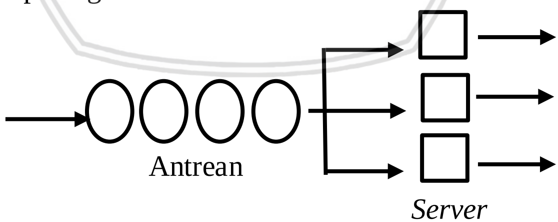
Model antrean *M/M/C* akan berlaku dengan asumsi sebagai berikut:

1. *M* adalah waktu antar kedatangan yang berdistribusi eksponensial (Proses Poisson),
2. *M* adalah waktu pelayanan yang didistribusikan secara eksponensial, dan
3. *C* adalah Jumlah *server* dibatasi *c server*.

Jika *traffic intensity* ($\rho = \frac{1}{\mu}$) mendekati satu, maka rata-rata waktu antre menjadi lebih lama dan pengantre dapat menjadi tidak sabar. Dalam menghadapi kasus ini, dapat diatasi dengan menambah *server*.

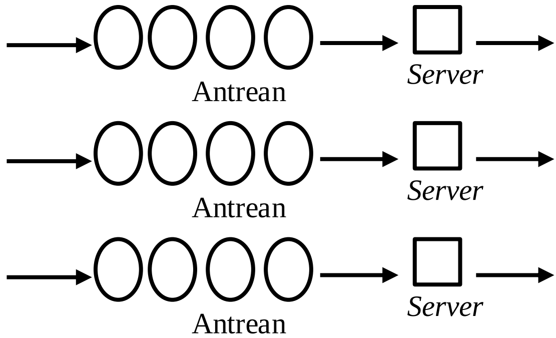
Ada beberapa cara menambah *server* seperti diilustrasikan pada gambar berikut:

a



Gambar 2.7 Struktur Antrean dengan Beberapa *Server* Tunggal Satu Tahap yang Bekerja Serentak

b



Gambar 2.8 Struktur Antrean dengan Satu *Server* Serentak

Struktur proses antrean seperti Gambar 2.8 tersebut tidak dapat dikatakan sebagai struktur antrean banyak *server*, melainkan suatu struktur antrean dengan beberapa *server* tunggal satu tahap yang bekerja secara serentak. Jadi untuk struktur ini dapat dianalisis dengan menerapkan model *server* tunggal. Struktur antrean banyak *server* satu tahap ditunjukkan pada Gambar 2.7. Maksud dari struktur ini adalah bahwa hanya ada satu jalur antrean di depan fasilitas pelayanan yang berisi banyak *server* atau pelayan. Pengantre akan dilayani jika *server* siap atas dasar FCFS.

Rumusan *operating characteristics* pada model antrean banyak *server* satu tahap berikut ini didasarkan pada beberapa asumsi, antara lain kedatangan mengikuti distribusi Poisson, waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, *infinite calling population*, panjang antrean tak terbatas, disiplin antre FCFS, rata-rata tingkat pelayanan efektif adalah $c\mu$ dimana c adalah banyaknya *server* dan $c\mu$ lebih besar dari rata-rata tingkat kedatangan (λ), serta distribusi waktu pelayanan adalah sama untuk semua *server*.

Jika *steady state* tercapai, *operating characteristics* tersebut adalah:

1. Probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)}} \qquad (2.2)$$

2. Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, \text{ jika } n \leq c \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{c!c^{n-c}} P_0, \text{ jika } n > c \end{cases} \qquad (2.3)$$

3. Rata-rata banyaknya pelanggan yang sedang antre

$$L_q = \frac{P_0(\lambda - \mu)^c(\lambda - \frac{c}{\mu})}{c!\,(1 - \lambda/c\mu)^2}$$

4. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

5. Rata-rata waktu antre

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

6. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

(Mulyono,2017)

2.10.3 Model Antrean *M/M/C/C* (Erlang-B) dan *M/M/C/∞* (Erlang-C)

Model antrean *M/M/C/C* (Erlang-B) dan *M/M/C/∞* (Erlang-C) akan berlaku dengan asumsi sebagai berikut:

1. *M* adalah waktu antar kedatangan yang berdistribusi eksponensial (Proses Poisson),
2. *M* adalah waktu pelayanan yang didistribusikan secara eksponensial,
3. *C* adalah Jumlah *server* dibatasi *c server*, dan
4. *C* pada model Erlang-B atau ∞ pada model Erlang-C menyatakan Jumlah maksimum pelanggan yang dapat berada dalam sistem.

(Henk C. Tijms,2003)

2.11 Proses Stokastik

Pertimbangan titik waktu diskrit dalam waktu (t_n) untuk $n = 1,2,\ldots$ dan anggaplah X_{t_n} adalah variabel acak yang mencirikan keadaan sistem di t_n. Himpunan variabel acak (X_{t_n}) membentuk sebuah proses stokastik.

(Taha ,1997)

2.12 Proses Markov

Sebuah proses Markov adalah sebuah sistem stokastik yang muncul jika suatu keadaan di masa mendatang bergantung pada keadaan sebelumnya. Jika $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ mewakili kejadian tertentu, kelompok variabel acak (X_{tk}) adalah sebuah proses Markov jika memiliki sifat Markov sebagai berikut ini:

$$P\left(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = x_0\right)$$

sama dengan

$$P\left(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$$

Untuk semua nilai yang mungkin $X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t}$. Probabilitas dari $P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$ disebut probabilitas transisi satu langkah. Asumsikan bahwa sistem bersifat Markov.

Definisikan:

$$P_{ij} = P\left(X_{t_n} = j \middle| X_{t_{n-1}} = i\right)$$

P_{ij} disebut sebagai probabilitas transisi satu langkah yang bergerak dari *state i* pada saat t_{n-1} ke *state j* pada saat t_n dan asumsikan bahwa probabilitas ini bersifat tetap (*stasioner*) sepanjang waktu. Suatu sistem yang dimodelkan dengan menggunakan model rantai Markov jika memiliki *c* buah *state*, maka matriks transisi dari probabilitas transisi dari *state i* ke *state j* secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Matriks P_{ij} disebut matriks transisi homogen, karena semua probabilitas transisi P_{ij} adalah tetap maka probabilitas P_{ij} harus memenuhi kondisi sebagai berikut:

a. $\sum_j P_{ij} = 1$, untuk semua i
b. $P_{ij} \geq 0$, untuk semua i dan j

(Taha ,1997)

Proses Markov akan menuju kondisi *steady state* (keseimbangan) artinya setelah proses berjalan selama beberapa periode, probabilitas akan bernilai tetap. Jika kondisi *steady state* tercapai, maka probabilitas periode akan sama dengan probabilitas periode j atau $P_j = P_i = M$, untuk $M = [P_0 \quad P_1 \quad \ldots]$. Probabilitas periode j dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_j = P_i P_{ij}$$
$$M = MP_{ij}$$

(Mulyono,2017)

Menurut Hillier dan Lieberman, jika kondisi *steady state* tercapai, maka probabilitas *steady state* dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$P_j = \sum_{i=0}^{c} P_i P_{ij}, \qquad \text{untuk } j = 0,1,2,\ldots,c$$

$$\sum_{j=0}^{c} P_j = 1$$

2.13 Proses Kelahiran dan Kematian

Proses Markov X_t disebut proses kelahiran dan kematian jika

$$P[X_{(t+\Delta t)} = i | X_t = j] = \begin{cases} \lambda_j \Delta t, & i = j+1, \quad j \geq 0 \\ \mu_j \Delta t, & i = j-1, \quad j \geq 1 \\ 1 - (\lambda_j + \mu_j)\Delta t, & j \geq 1 \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

di mana λ_j dan μ_j adalah konstanta positif. λ_j disebut sebagai tingkat kelahiran atau tingkat kedatangan sedangkan μ_j disebut sebagai tingkat kematian atau tingkat keberangkatan untuk $(j = 0, 1,2,3 \ \ldots)$.

(Taha,2007)

2.13.1 Proses Kelahiran Murni

Asumsikan bahwa $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_0 = 0$ untuk seluruh n. Ini menunjukkan bahwa kematian tidak akan pernah terjadi sehingga prosesnya menjadi proses kelahiran murni dengan tingkat kedatangan rata-rata konstan.

Asumsikan bahwa sistem dalam keadaan 0 pada saat $t = 0$, maka:

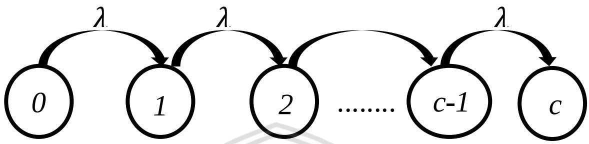
$$P_0 = e^{-\lambda t} \qquad \text{untuk } n = 0$$

atau:

$$P_n = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \qquad \text{untuk } n = 1, 2, \ldots$$

(Taha,2007)

Berikut adalah diagram dari kelahiran murni:



Gambar 2.8 Diagram kelahiran murni

2.13.2 Proses Kematian Murni

Menurut Taha (2007) asumsikan bahwa $\lambda_n = 0$ untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dan bahwa $\mu_n = \mu$ untuk $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Asumsikan juga bahwa sistem dalam keadaan c pada saat $t = 0$. Asumsi pertama menyatakan bahwa kelahiran tidak pernah terjadi, sehingga prosesnya adalah proses kematian murni dengan tingkat pelayanan rata-rata konstan sampai proses berakhir pada *state* 0. Jadi, proses ini ekuivalen dengan proses kelahiran murni, kecuali bahwa proses-proses ini bergerak dalam arah yang berlawanan (*line length*/panjang garisnya), dan proses berhenti setelah c kejadian. $(c - n)$ adalah jumlah kejadian kematian yang telah terjadi dalam proses. Dengan cara yang sama seperti pada proses kelahiran murni, diperoleh peluang bahwa tidak ada kejadian terjadi pada saat t adalah:

$$P_0 = e^{-\mu t}$$

Peluang bahwa $(c - n)$ kejadian telah terjadi, di mana untuk $(c - n) < c$, adalah:

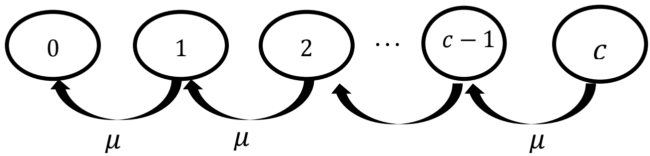
$$P_n = \frac{(\mu t)^{c-n} e^{-\mu t}}{(c-n)!}$$

Sehingga peluang bahwa tidak ada kejadian terjadi adalah:

$$P_0 = 1 - \sum_{n=1}^{c} P_n \qquad (2.4)$$

(Taha,2007)

Berikut adalah diagram dari kematian murni:



Gambar 2.9 Diagram kematian murni

2.14 Bank

Sesuai dengan UU RI No. 10 tahun 1998, bank adalah badan usaha yang menghimpun dana dari masyarakat dan menyalurkannya kepada masyarakat dalam bentuk kredit atau bentuk-bentuk lainnya dalam rangka meningkatkan taraf hidup masyarakat.

Fungsi-fungsi bank menurut Sigit Triandaru & Totok Budisantoso (2006:62) yakni untuk pemasokan kredit (*credit action*), fungsi penerimaan simpanan (*deposit function*), pembayaran dan penagihan (*payment and collection*), akumulasi tabungan dan investasi (*saving accumulation and investment*), jasa–jasa kepercayaan (trust services), dan jasa-jasa lainnya (*other services*). Dari berbagai fungsi bank, dua fungsi utamanya adalah fungsi penerimaan simpanan dan fungsi pemasaran kredit. Dari pemasaran kredit bank memperoleh pendapatan berupa bunga kredit. Untuk melaksanakan fungsi pemasaran kredit tersebut bank sangat menggantungkan diri pada besarnya dana yang bersumber pada simpanan dana nasabah yang berupa giro, deposito dan tabungan.

Menurut UU RI No. 10 tahun 1998, bank dapat dikelompokkan menjadi beberapa kelompok yakni.

1. Berdasarkan Jenisnya

   Berdasarkan jenisnya bank dikelompokkan menjadi dua:

   a. Bank Umum
   b. Bank Perkreditan Rakyat

2. Berdasarkan Kepemilikannya
   Berdasarkan status kepemilikannya, bank dikelompokkan menjadi lima:
   a. Bank Milik Negara (Badan Usaha Milik Negara atau BUMN)
   b. Bank Milik Pemerintah Daerah (BPD)
   c. Bank Milik Swasta Nasioal
   d. Bank Milik Swasta Campuran (Nasional Dan Asing)
   e. Bank Milik Asing
3. Berdasarkan Bentuk Hukumnya
   Berdasarkan bentuk hukumnya bank dapat dibedakan menjadi empat:
   a. Bank Berbentuk Hukum Perusaha Daerah
   b. Bank Berbentuk Hukum Perseroan
   c. Bank Berbentuk Hukum Perseroan Terbatas
   d. Bank Berbentuk Hukum Koperasi
4. Berdasarkan kegiatan usahanya
   Berdasarkan kegiatan usahanya bank dapat dikelompokkan menjadi dua:
   a. Bank Devisa
   b. Bank bukan Devisa
5. Berdasarkan pembayaran bunga atau pembagian hasil usaha.
   Berdasarkan pembayaran bunga atau pembagian hasil usaha dapat dikelompokkan menjadi dua:
   a. Bank Konvensional
   b. Bank Berdasarkan Prinsip Syariah

Bank umum adalah bank yang melaksanakan kegiatannya secara konvensional dan atau berdasarkan prinsip syariah dalam kegiatannya memberikan jasa dalam lalulintas pembayaran. Menurut Sigit Triandaru & Totok Budisantoso (2006:62) adapun kegiatan perbankan di Indonesia adalah sebagai berikut:

1. Menghimpun dana dari masyarakat (*Funding*) dalam bentuk :
   a. Giro
      Rekening giro atau *checking account* adalah simpanan yang penarikannya dapat dilakukan setiap

saat dengan menerbitkan cek untuk penarikan tunai, sedangkan cek atau bilyet giro ini oleh pemiliknya dapat digunakan sebagai alat pembayaran.

b. Deposito Berjangka

Deposito berjangka adalah simpanan yang penarikannya hanya dapat dilakukan pada waktu tertentu sesuai tanggal yang diperjanjikan antara deposan dan bank.

c. Tabungan

Tabungan adalah simpanan yang penarikannya hanya dapat dilakukan dengan syarat tertentu yang telah disepakati, dan tidak dengan cek atau bilyet giro atau alat lain yang dapat dipersamakan dengan itu. Cara penarikan rekening tabungan yang paling banyak digunakan saat ini adalah dengan buku tabungan, *cash card* atau kartu ATM dan *debet card*.

d. Sertifikat Deposito

Sertifikat deposito adalah deposito berjangka yang bukti simpanannya dapat diperjualbelikan. Agar simpanan ini dapat dengan mudah diperjualbelikan maka penarikan pada saat jatuh tempo dapat dilakukan atas tunjuk, sehingga siapapun yang memegang bukti simpanan tersebut dapat menguangkannya pada saat jatuh tempo.

2. Menyalurkan dana ke masyarakat (*Lending*) dalam bentuk kredit.

Pemberian kredit merupakan salah satu bentuk usaha yang dapat dilakukan oleh sebuah bank. Berdasarkan UU No.10 tahun 1998 tentang Perubahan atas UU No. 7 tahun 1992 tentang Perbankan, yang dimaksud dengan kredit adalah penyediaan uang atau tagihan yang dapat disamakan, berdasarkan persetujuan atau kesepakatan pinjam meminjam antara bank dengan pihak lain yang mewajibkan pihak peminjam untuk melunasi utangnya setelah jangka waktu tertentu dengan pemberian bunga.

3. Memberikan jasa-jasa bank lainnya (*Service*) antara lain:
   a. Menerima setoran-setoran seperti :
      1) Pembayaran telepon
      2) Pembayaran pajak
      3) Pembayaran air
      4) Pembayaran uang kuliah/SPP
      5) Pembayaran listrik
   b. Melayani pembayaran-pembayaran seperti :
      1) Gaji/Pensiun/Honorarium
      2) Pembayaran bonus/hadiah
      3) Pembayaran kupon
      4) Pembayaran deviden
   c. Di dalam pasar modal perbankan dapat memberikan atau menjadi :
      1) Penjamin emisi (*Underwriter*)
      2) Penanggung (*Guarantor*)
      3) Wali amanat
      4) Perantara perdagangan efek (pialang/*broker*)
      5) Pedagang efek (*dealer*)
      6) Perusahaan pengelola dana (*investment company*)
   d. Pengiriman uang
   e. Letter of credit
   f. Bank Garasi
   g. Kliring dan Inkaso
   h. Kartu plastik
   i. Money changer
   j. Traveller's check
   k. Telebanking
   l. Custodian
   m. Standing order
   n. Safe deposit box

2.15 Istilah-Istilah Perbankan

Menurut Taswan (2008) terdapat beberapa istilah perbankan yang berkaitan dengan *excess reserves* (kelebihan cadangan).

1. Aset
   Aktiva adalah segala kekayaan yang dimiliki oleh suatu perusahaan, yang dimaksud dengan kekayaan adalah sumber daya yang dapat berupa benda atau hak yang dikuasai dan diperoleh melalui transaksi atau kegiatan perbankan sebelumnya.
2. Ekuitas
   Ekuitas adalah modal yang diinvestasikan dalam suatu usaha. Ekuitas merupakan salah satu unsur penting dalam laporan neraca. Dalam teori dasar akuntansi memiliki rumus dasar **aset = kewajiban + ekuitas**. Ekuitas ini adalah modal pemilik yang menjadi modal awal perusahaan.
3. Liabilitas
   Liabilitas merupakan kewajiban yang ada dalam laporan neraca perusahaan. Intinya liabilitas adalah utang piutang keuangan perusahaaan atau kewajiban yang timbul selama operasi bisnis.
4. Likuiditas
   Likuiditas adalah kemampuan suatu instansi untuk memenuhi kewajibannya atau dapat dikatakan kemampuan untuk membayar hutang piutang.
5. *Loans*
   Loans adalah jumlah pinjaman yang diberikan oleh peminjam sesuai dengan agunan yang diberikan.
6. Cadangan Wajib Minimum
   Cadangan Wajib Minimum adalah jumlah dana yang harus dipertahankan dalam rekening giro pada Bank Sentral dalam bentuk kas. Rekening giro yang merupakan cadangan wajib minimum di Bank Sentral tidak diberikan bunga. (*reserve requirement*).

7. Cadangan likuiditas
   Cadangan likuiditas adalah persentase tertentu dari dana pihak ketiga yang wajib disimpan dalam bentuk giro pada Bank Indonesia (*reservable deposits*).
8. Cadangan Umum
   Cadangan umum adalah cadangan yang dibentuk dari penyisihan laba ditahan atau dari laba bersih setelah dikurangi pajak (*general reserve*).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data simulasi. Data yang digunakan berupa contoh kasus bertujuan untuk memahami perhitungan dari probabilitas sistem dan penerapan model antrean *M/M/C/C* (Erlang-B) dan *M/M/C/∞* (Erlang-C) pada manajemen *excess reserves* pada bank.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Adapun langkah-langkah dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur untuk mencari referensi teori yang relevan dengan materi dan kasus yang ditemukan melalui buku atau jurnal.
2. Mengulas model antrean *M/M/C/C* (Erlang-B) *dan* *M/M/C/∞* (Erlang-C).
3. Penerapan hasil langkah 2 menggunakan ilustrasi numerik.
4. Pengambilan kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh dari simulasi data.

1.2.1 Langkah-Langkah Pengulasan Model Antrean *M/M/C/C*

Adapun lagkah-langkah dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Melakukan studi literatur untuk mencari referensi teori yang relevan dengan materi dan kasus yang ditemukan melalui buku atau jurnal.
2. Mengilustrasikan model antrean *M/M/C/C* dengan menggunakan diagram laju transisi dengan laju kedatangan λδ dan laju pelayanan μδ.
3. Menyamakan probabilitas *server* k digunakan atas laju pelayanan ($k\mu\delta P_k$) dengan probabilitas *server* $(k-1)$ digunakan atas laju kedatangan ($\lambda\delta P_{k-1}$) untuk $k \leq c$, diperoleh $P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{k\mu P_k}$.
4. Menguraikan hasil langkah ke 3 dengan memisalkan $k = 1$, diteruskan hingga $k = c$ maka diperoleh
$$P_c = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c P_0 \frac{1}{c!}\,.$$

5. Persamaan hasil dari langkah 4 dengan menggunakan persamaan (2.4) diubah menjadi probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem (P_0).
6. Probabilitas hasil dari langkah 5 disubstitusi ke langkah 4 didapatkan persamaan baru yaitu probabilitas untuk semua *server* digunakan (P_c) yaitu probabilitas Erlang-B.
7. Mengubah parameter c dari probabilitas hasil langkah 6 menjadi $\frac{\gamma L}{\omega}$ diperoleh $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ B}$.
8. Ilustrasi numerik $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ B}$ untuk mengoptimalkan *excess reserves* dengan parameter μ, λ, *U*,dan *ω*.
9. Probabilitas hasil dari langkah 8 disubstitusi parameter μ, λ, *U*, dan *ω* diperoleh γL yaitu *excess reserves* yang optimal.
10. Mencari dana yang optimal untuk dipinjamkan yaitu dengan rumus Aset-Giro Wajib minimum- γL =Loans.
11. Pengambilan kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh dari langkah 10.

1.2.2 Langkah-Langkah Pengulasan Model Antrean *M/M/C/∞*

Adapun lagkah-langkah dari penelitian ini sebagai berikut:

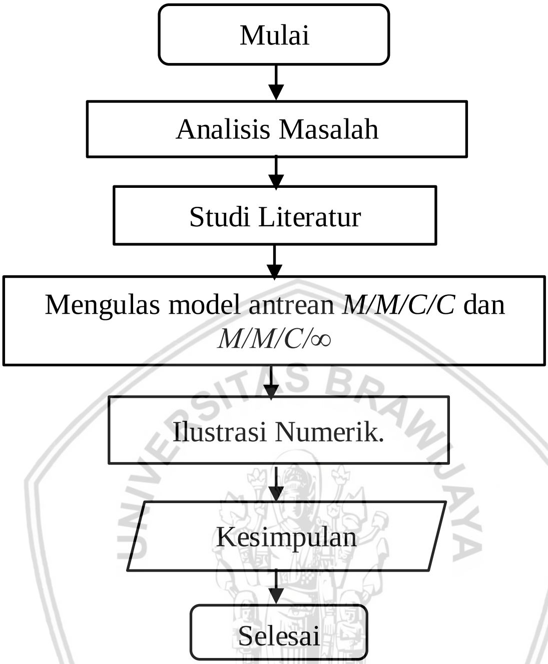
1. Melakukan studi literatur untuk mencari referensi teori yang relevan dengan materi dan kasus yang ditemukan melalui buku atau jurnal.
2. Mengilustrasikan model antrean *M/M/C/∞* dengan menggunakan diagram laju transisi dengan laju kedatangan λδ dan laju pelayanan μδ.
3. Menyamakan probabilitas *server* k digunakan atas laju pelayanan ($k\mu\delta P_k$) dengan probabilitas *server* $(k-1)$ digunakan atas laju kedatangan ($\lambda\delta P_{k-1}$) untuk $k \leq c$, diperoleh $P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{k\mu P_k}$.
4. Mencari probabilitas seseorang menunggu untuk $k > c$ dari langkah 3 diperoleh persamaan $P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{c\mu P_k}$.
5. Menguraikan hasil langkah ke 3 dan 4 dengan memisalkan $k = 1$, dan diteruskan hingga $k = c$ maka diperoleh

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^k}{k!} P_0, & \text{jika } k \leq c \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^k}{c!\, c^{k-c}} P_0, & \text{jika } k > c \end{cases}$$

6. Persamaan hasil dari langkah 5 dengan menggunakan persamaan (2.4) diubah menjadi probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem (P_0).
7. Probabilitas hasil dari langkah 6 disubstitusi ke langkah 5 didapatkan persamaan baru yaitu probabilitas untuk semua *server* digunakan (P_c) yaitu probabilitas Erlang-C.
8. Mengubah parameter c dari probabilitas hasil langkah 7 menjadi $\frac{\gamma L}{\omega}$ diperoleh $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ C}$.
9. Ilustrasi numerik dari $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ C}$ untuk menentukan probabilitas pelanggan menunggu dengan parameter μ, λ, U,dan ω.
10. Menentukan $P(X > t|X > 0)$ maka diperoleh probabilitas pelanggan menunggu yaitu
$$P(X > t) = P(X > 0)\, P(X > t|X > 0).$$
11. Hasil dari langkah 10 ditulis menjadi parameter c dan disubstitusikan ke langkah 9 untuk menentukan probabilitas pelanggan menunggu.
12. Pengambilan kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh dari langkah 11.

3.3 Diagram Alir Penelitian

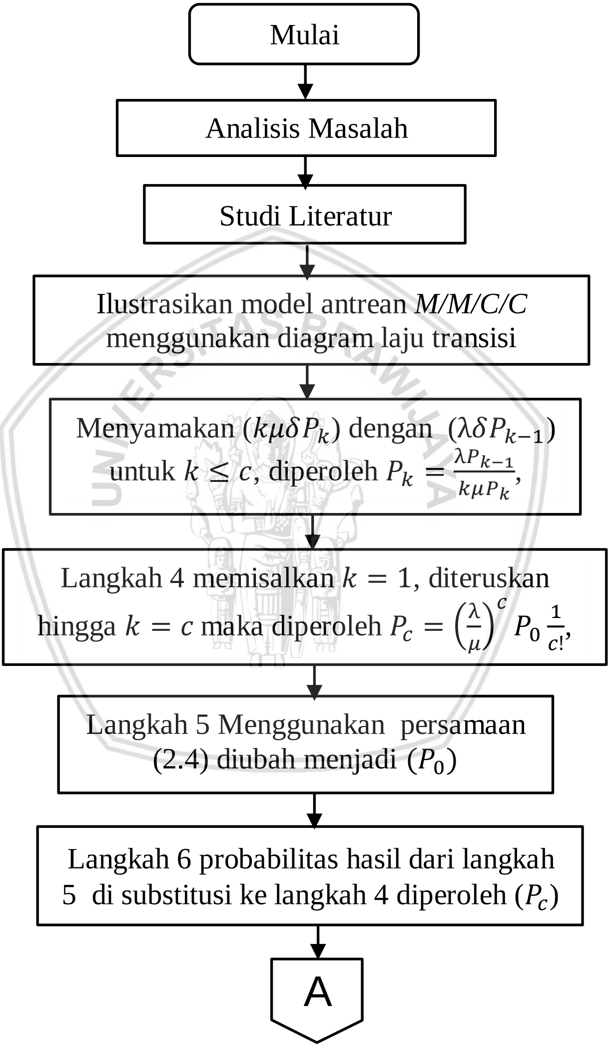
Berikut pada gambar disajikan diagram alir penelitian penerapan model antrean *M/M/C/C* dan *M/M/C/∞* pada Bank.

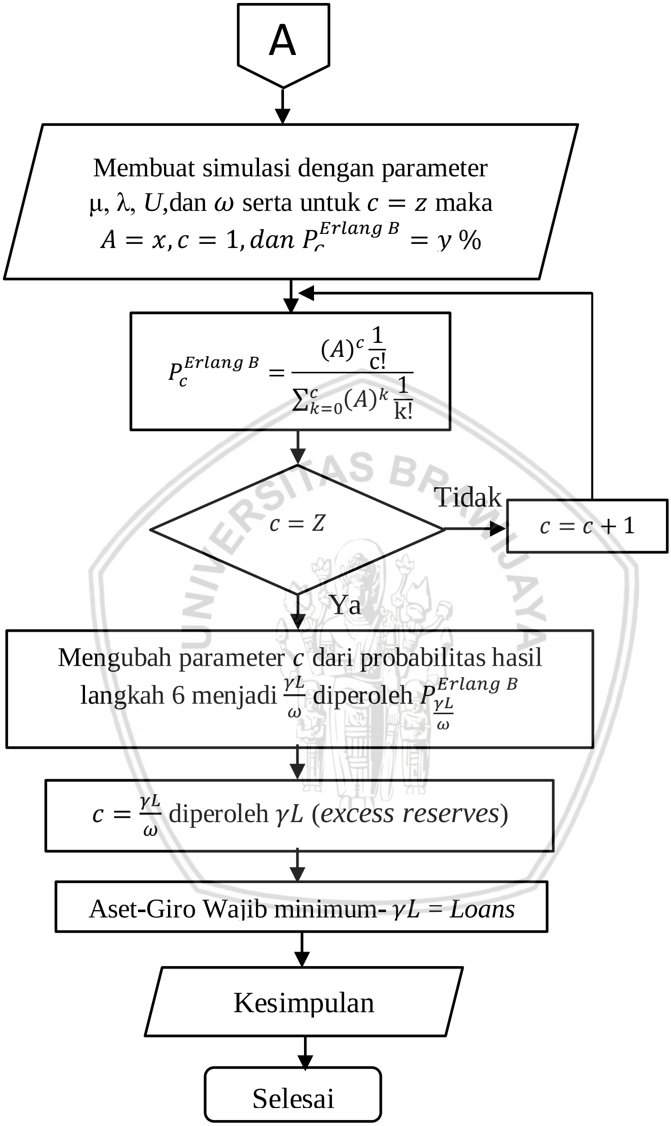


Gambar 3.1 Diagram alir penelitian

1.2.3 Diagram Pengulasan Model Antrean *M/M/C/C*

Berikut pada gambar disajikan diagram alir pengulasan model antrean *M/M/C/C*.

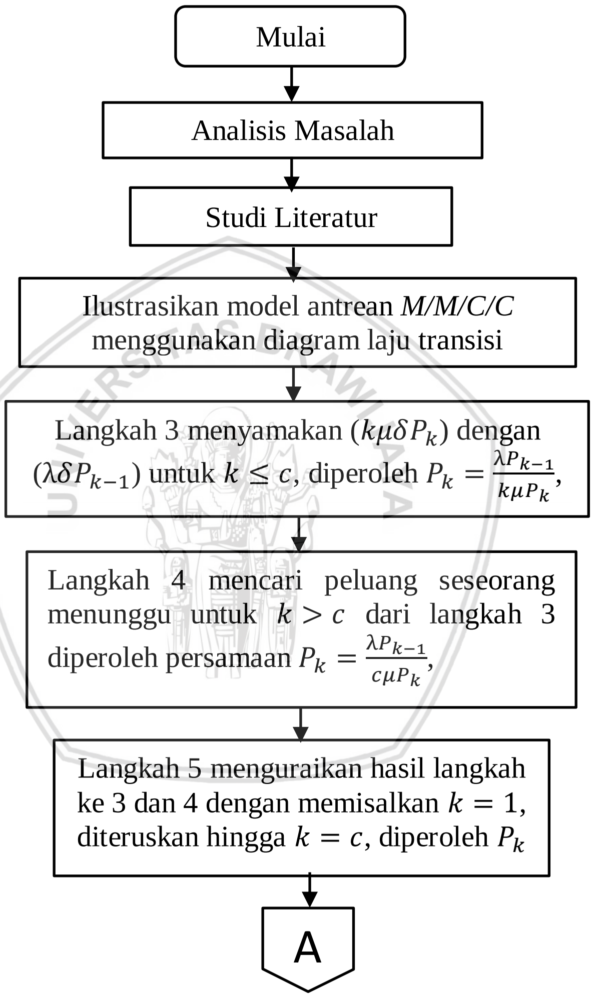


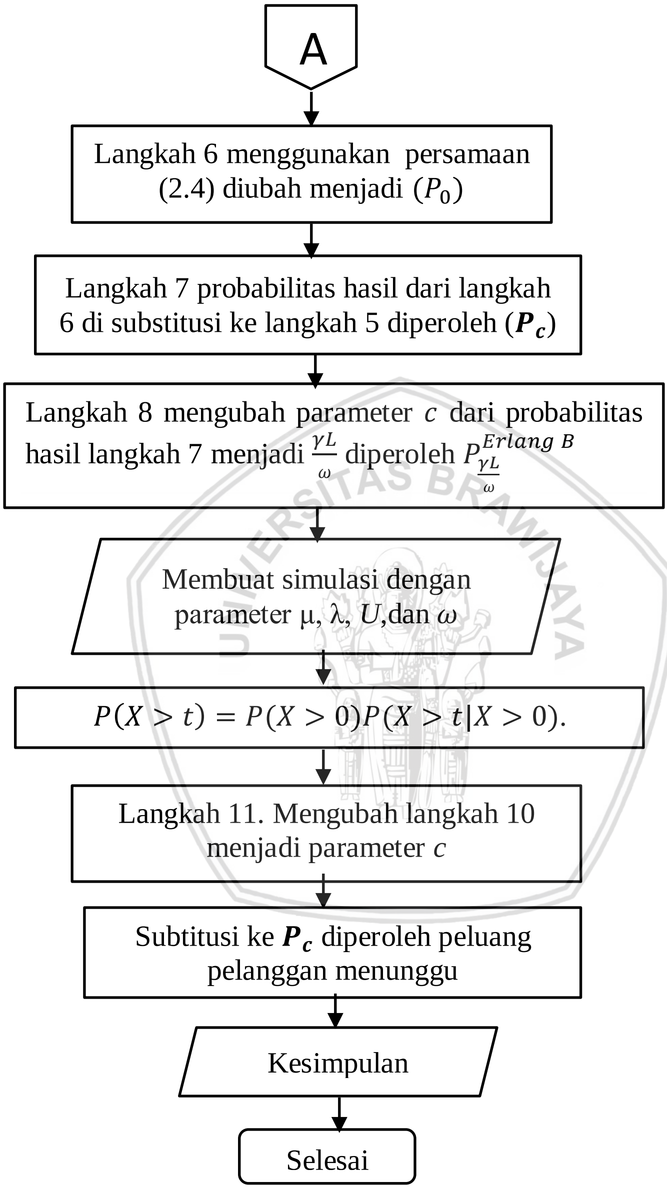


Gambar 3.2 Diagram alir pengulasan model antrean *M/M/C/C*

1.2.4 Diagram Pengulasan Model Antrean *M/M/C/∞*

Berikut pada gambar   disajikan diagram alir pengulasan model antrean *M/M/C/∞*.





Gambar 3.3 Diagram alir pengulasan model antrean *M/M/C/∞*

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas mengenai pengulasan model antrean Erlang-B dan Erlang-C. Kemudian menggunakan dasar teori yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya akan diperoleh model antrean Erlang-B dan Erlang-C .

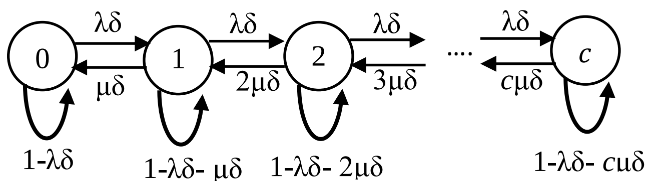
Model antrean Erlang-B dan Erlang-C pada umumnya digunakan untuk menentukan probabilitas bahwa pengguna tidak dapat menggunakan sumber daya pada waktu tertentu. Dalam kasus ini probabilitas tidak ada *server* yang kosong yaitu,

$$P\ (blocking) = P\ (\text{semua } server \text{ digunakan}) \tag{4.1}$$

Notasi Kendall-Lee dari model antrean Erlang-B dinotasikan sebagai *M/M/C/C* dan Erlang-C dinotasikan sebagai *M/M/C/*∞. Perbedaan utama antara model antrean Erlang-B dan Erlang-C adalah pada Erlang-B terdapat batasan pengguna yaitu ketika semua *server* digunakan maka pelanggan yang datang akan di *block* sedangkan pada Erlang-C pengguna diijinkan untuk menunggu beberapa saat untuk mengakses sumber daya, sehingga tidak ada batas pengguna.

4.1 Pengulasan Model Erlang-B

Diagram transisi untuk model Erlang-B ditunjukkan pada Gambar 4.1. Model ini diasumsikan jumlah *server* yang digunakan dibatasi hingga *c* dengan *state* terjadi dari *state* 0 sampai *state c* .



Gambar 4.1 Diagram transisi model Erlang-B

Untuk memahami diagram laju transisi pada Gambar 4.1, pertama asumsikan bahwa tidak ada *server* yang digunakan pada *state* 0. Setelah beberapa saat, probabilitas terus berada dalam *state* 0 adalah $1 - \lambda\delta$. Mulai dari *state* 1, probabilitas untuk kembali ke *state* 0 adalah μδ dan probabilitas terus berada di *state* 1 adalah $1 - \lambda\delta - \mu\delta$.

Dimana :

$0,1,2,3, \dots, c$	Adalah *state* atau *state* yang menggambarkan jumlah *server* yang sibuk pada suatu saat. Proses yang ditinjau adalah *state* yang menyatakan jumlah *server* atau peralatan yang diduduki sebagai fungsi waktu.
$\rightarrow$	Transisi atau berubahnya *state* tertentu ke *state* yang lain. Pada *state* *c* dapat menjadi (*c*+*1*) jika terdapat 1 pelanggan datang dan (*c*-*1*) jika terdapat 1 pelanggan berakhir.
$P_0, P_1, P_2, P_3 \dots, P_c$	*State probability* atau probabilitas kondisi yaitu lamanya pelayanan tersebut berlangsung dalam interval waktu tertentu, terhadap pelanggan ke i untuk $i = 0,1,2, \dots, c$.
P_{ij}	Probabilitas untuk melakukan transisi ke *state* *j* setelah satu interval waktu tertentu dimana *state* *i* merupakan awal dari satu interval waktu.

Model antrean Erlang-B menggambarkan sistem kontinu dengan pengamatan diskrit dalam *state* tertentu menggunakan rantai Markov. Ilustrasi model digambarkan dalam interval waktu δ, dimana δ adalah bilangan positif kecil. Jika N_k atau

$N\,(k\delta)$ adalah jumlah *server* yang sibuk pada waktu $k\delta$, kemudian N_k digambarkan sebagai rantai Markov diskrit dan $N_k \in [0, c]$. Dengan demikian probabilitas transisi P_{ij} adalah

$P_{i,j} = P\,(N_{k+1} = j | N_k = i)$ (4.2)

$P_{0,0} = P(N_{k+1} = 0 | N_k = 0) = 1 - \lambda\delta$

$P_{0,1} = P\,(N_{k+1} = 1 | N_k = 0) = \lambda\delta$

$P_{1.0} = P(N_{k+1} = 0 | N_k = 1) = \mu\delta$

$P_{1,1} = P\,(N_{k+1} = 1 | N_k = 1) = 1 - \lambda\delta - \mu\delta$

$P_{1,2} = P\,(N_{k+1} = 2 | N_k = 1) = \lambda\delta$

$P_{2,1} = P\,(N_{k+1} = 1 | N_k = 2) = 2\mu\delta$

$P_{2,2} = P\,(N_{k+1} = 2 | N_k = 2) = 1 - \lambda\delta - 2\mu\delta$

Dengan proses yang sama hingga $P_{c,c}$ diperoleh

$P_{c,c} = P\,(N_{k+1} = c | N_k = c) = 1 - \lambda\delta - c\mu\delta$

sedangkan untuk $|i - j| > 1$ maka $P_{i,j} = 0$

$P_{2,4}$ berarti $|2 - 4| = 2 > 1$ dan $P_{2,4} = 0$ begitu seterusnya.

Jumlah probabilitas untuk masing-masing baris matriks transisi harus sama dengan satu dengan persamaan umum sebagai berikut:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots + P_c = 1$$

$$\sum_{k=0}^{c} P_k = 1$$

$$P_0 + \sum_{k=1}^{c} P_k = 1$$

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{c} P_k \qquad (4.3)$$

Secara umum berdasarkan persamaan (4.2) bila suatu sistem yang dimodelkan dengan menggunakan model rantai

Markov secara diskrit memiliki *c* buah *state*, maka secara umum matriks transisinya dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & & P_{0c} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1c} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & & P_{2c} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_{c0} & P_{c1} & P_{c2} & \cdots & P_{cc} \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1-\lambda\delta & \lambda\delta & & 0 & 0 \\ \mu\delta & 1-\lambda\delta-\mu\delta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\delta & & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda\delta & 0 \\ 0 & 0 & & 1-\lambda\delta-(c-1)\mu\delta & \lambda\delta \\ 0 & 0 & \dots & c\mu\delta & 1-\lambda\delta-c\mu\delta \end{bmatrix}$$

Prinsip dari perhitungan ini adalah jika suatu sistem memasuki kondisi *steady state*, perkalian matrik transisi selanjutnya tidak akan merubah nilai probabilitas dari keadaan sistem yang sudah setimbang. Kondisi *steady state* dari model rantai markov akan berlaku persamaan sebagai berikut:

$$MP_{ij} = M \tag{4.4}$$

M menyatakan vektor probabilitas untuk kondsi *steady state* dimana $M = [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_c]$ dengan $P_0, P_1, P_2, \dots, P_c$ mewakili probabilitas keadaan *steady state* dari sistem untuk berada pada *state* $0, 1, 2, \dots, c$. Persamaan (4.4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$[P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_c]P_{ij} = [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_c] \tag{4.5}$$

hasil perkalian dari persamaan (4.5) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_0(1-\lambda\delta) + P_1\mu\delta = P_0 \quad \rightarrow \quad P_0 - P_0\lambda\delta + P_1\mu\delta = P_0$$

$$P_0 - P_0 + P_0\lambda\delta = P_1\mu\delta$$

$$P_1\mu\delta = P_0\lambda\delta$$

$$P_0 = \frac{P_1\mu}{\lambda}$$

$$P_0\lambda\delta + P_1(1-\lambda\delta - \mu\delta) + P_2(2\mu\delta) = P_1$$
$$P_0\lambda\delta + P_1 - P_1\lambda\delta - P_1\mu\delta + P_2(2\mu\delta) = P_1$$
$$P_0\lambda\delta + P_1 - P_1 - P_1\lambda\delta - P_1\mu\delta = P_2(2\mu\delta)$$
$$-\frac{P_1\mu\delta}{\cancel{\lambda\delta}}\cancel{\lambda\delta} + P_1\lambda\delta + P_1\mu\delta = P_2(2\mu\delta)$$
$$P_1\lambda\delta = P_2(2\mu\delta)$$
$$P_1 = \frac{P_2(2\mu)}{\lambda}$$

Dengan melalui proses yang sama hingga $k < c$ diperoleh

$$P_{c-2}(\lambda\delta) + P_{c-1}(1-\lambda\delta - c\mu\delta) = P_{c-1}$$
$$P_{c-2}\lambda\delta + P_{c-1} - P_{c-1}\lambda\delta - P_{c-1}\mu\delta + P_c(c\mu\delta) = P_{c-1}$$
$$P_{c-2}\lambda\delta + P_{c-1} - P_{c-1} - P_{c-1}\lambda\delta - P_{c-1}\mu\delta + P_c(c\mu\delta) = 0$$
$$\frac{P_{c-1}((c-1)\mu\delta)\cancel{\lambda\delta}}{\cancel{\lambda\delta}} - P_{c-1}\lambda\delta - P_{c-1}\mu\delta + P_c(c\mu\delta) = 0$$
$$-P_{c-1}\lambda\delta + P_c(c\mu\delta) = 0$$
$$P_{c-1}\lambda\delta = P_c(c\mu\delta)$$

Ketika sistem mencapai keadaan k, probabilitas bahwa *server* k digunakan sama dengan probabilitas *server* $k-1$ saat $\lambda\delta$. Sehingga

$$\lambda\delta P_{k-1} = k\mu\delta P_k, \quad k \le c \tag{4.6}$$

merubah persamaan (4.6) menjadi P_k diperoleh

$$P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{k\mu} \tag{4.7}$$

Untuk persamaan (4.7) Jika $k = 1$ maka diperoleh

$$P_1 = \frac{\lambda P_0}{\mu} \tag{4.8}$$

Jika $k = 2 \rightarrow P_2 = \frac{\lambda P_1}{2\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{P_0}{1.2}$ dengan mensubstitusi P_1 diperoleh

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{P_0}{1.2.3}$$

Untuk $k = 3 \rightarrow P_3 = \frac{\lambda P_2}{3\mu}$ dengan mensubstitusi P_2 diperoleh

$$P_3 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{P_0}{1.2.3}$$

Untuk $k = 4 \rightarrow P_4 = \frac{\lambda P_3}{4\mu}$ dengan mensubstitusi P_3 diperoleh

$$P_4 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}\frac{P_0}{1.2.3.4}$$

Dengan melalui proses yang sama hingga untuk $k = k$ diperoleh

$$k = k \rightarrow P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{\mathrm{k}\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{\mathrm{k}!} \qquad (4.9)$$

Menurut persamaan (4.9), probabilitas untuk semua *server* telah digunakan diperoleh

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{\mathrm{k}!} \qquad (4.10)$$

Menurut persamaan (4.10) dan (4.3) P_0 dapat ditulis

$$P_0 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k P_k k! = 1 - \sum_{k=1}^{c} P_k$$

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{c} P_k \qquad (4.11)$$

$$P_0 + \sum_{k=1}^{c} P_k = 1 \qquad (4.12)$$

Substitusi persamaan (4.10) ke persamaan (4.12) diperoleh

$$P_0 + \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{\mathrm{k}!} = 1$$

$$P_0 + P_0 \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \quad = 1$$

$$P_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right) = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \qquad (4.13)$$

Diperoleh probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \qquad (4.14)$$

Dari persamaan (4.10), probabilitas untuk semua *server* telah digunakan untuk *server* $k = c$ adalah

$$P_c = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \qquad (4.15)$$

Substitusi persamaan (4.14) ke persamaan (4.15) diperoleh

$$P_c = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!}$$

$$P_c = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \qquad (4.16)$$

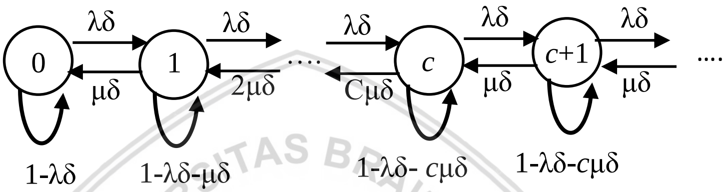
Karena rata-rata waktu penarikan/deposit adalah $H = {}^{1}/_{\mu}$ maka jumlah arus kas untuk semua pengguna diberikan $A = \lambda H = \frac{\lambda}{\mu}$.

Persamaan (4.16) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_c^{Erlang\ B} = \frac{(A)^c \frac{1}{c!}}{\sum_{k=0}^{c}(A)^k \frac{1}{k!}} \qquad (4.17)$$

Sehingga pada persamaan (4.17) diperoleh probabilitas terhadap pelanggan diblokir untuk penarikan uang tunai.

1.2 Pengulasan Model Erlang-C



Gambar 4.2 Diagram transisi model Erlang-C

Penurunan rumus Erlang-C hampir sama dengan Erlang-B tetapi pada Erlang-C tidak ada batasan pengguna setelah semua kapasitas sistem telah digunakan. Gambar 4.2 menunjukkan diagram transisi untuk Erlang-C yang sesuai dengan sistem antrean. Pada model ini penurunan rumus dipecah menjadi 2 yaitu ketika sistem mencapai keadaan $k \leq c$ dan ketika sistem melebihi c atau $k > c$.

Untuk $k \leq c$ persamaan (4.10) seperti pada Erlang-B dapat ditulis sebagai berikut

$$P_k = \frac{\lambda P_{k-1}}{k\mu}$$

Berdasarkan Gambar 4.2 untuk $k > c$ (tingkat kedatangan) λ bersifat konstan maka P_k dapat ditulis sebagai berikut

$$P_k = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{c}P_{k-1} \qquad (4.18)$$

Persamaan (4.18) berdasarkan Gambar 4.2 probabilitas untuk $k = c + 1$ hingga k menuju tak hingga, dengan menggunakan persamaan (4.15) maka diperoleh

Jika $k = c + 1 \rightarrow P_{c+1} = \frac{\lambda P_c}{(c+1)\mu}$ dengan mensubstitusi P_{c+1} diperoleh $P_{c+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{\mu} \frac{P_0}{c!(c+1)} \frac{1}{c}$

Jika $k = c + 2 \rightarrow P_{c+2} = \frac{\lambda P_{c+1}}{(c+2)\mu}$ dengan mensubstitusi P_{c+2} diperoleh $P_{c+2} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{P_0}{c!(c+1).(c+2)} \frac{1}{c.c}$

Jika $k = c + 3 \rightarrow P_{c+3} = \frac{\lambda P_{c+2}}{(c+3)\mu}$ dengan mensubstitusi P_{c+3} diperoleh $P_{c+3} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} \frac{P_0}{(c+1).(c+2).(c+3)} \frac{1}{c.c.c}$

Dengan melalui proses yang sama hingga untuk $k = \infty$ diperoleh

$$k = \infty \rightarrow P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{c!} \frac{1}{c^{k-c}} \qquad (4.19)$$

Menurut persamaan (4.10) dan (4.19), probabilitas untuk semua *server* telah digunakan, untuk *server k* diperoleh

$$P_k = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{k!}, & k \leq c \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{P_0}{c!} \frac{1}{c^{k-c}}, & k > c \end{cases} \qquad (4.20)$$

Berdasarkan persamaan (4.3) jumlah dari semua probabilitas harus sama dengan satu dengan persamaan umum sebagai berikut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_c + P_{c+1} + \cdots = 1$$

$$P_0 + P_0 \frac{\lambda}{\mu} + \cdots + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c} + \cdots + P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{c+1-c}} + \cdots = 1$$

$$P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c} + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{c+1-c}} + \cdots \right) = 1$$

$$P_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=c}^{\infty} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{k-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \cdots \right) = 1 \quad (4.21)$$

Misalkan pada persamaan (4.21) bahwa

$$\sum_{k=c}^{\infty} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{k-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \frac{1}{c^0} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^1} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^2} + ..$$

$$= \frac{1}{c!} \left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c^0} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c^1} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+2} \frac{1}{c^2} + \cdots \right)$$

(4.22)

Dengan nilai awal $a = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c$ dan rasio $r = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c^1}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c} \frac{1}{c^0}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+2} \frac{1}{c^2}}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} \frac{1}{c^1}} = \frac{\lambda}{\mu c}$ dari deret geometri pada persamaan (4.22) maka diperoleh

$$\sum_{k=c}^{\infty} \frac{1}{c!} \frac{1}{c^{k-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1}{c!} \sum_{k=c}^{\infty} \frac{1}{c^{k-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$= \frac{1}{c!} \left(\frac{a}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{c!} \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1 - \frac{\lambda}{\mu c}} \right) \quad (4.23)$$

maka dengan substitusi persamaan (4.23) pada persamaan (4.21) diperoleh

$$P_0\left(\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\right)\right)=1 \tag{4.24}$$

Dengan merubah persamaan (4.24) menjadi P_0 diperoleh probabilitas tidak ada pelanggan dalam system dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\right)} \tag{4.25}$$

Probabilitas (*blocking*) semua *server* telah digunakan yaitu ketika $k > c$ maka dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(blocking) &= \sum_{k=c}^{\infty}P_k=\sum_{k=c}^{\infty}\frac{1}{c!}\frac{1}{c^{k-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0\\ &= P_0\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\sum_{k=c}^{\infty}\frac{1}{c^{k-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-c}\\ &= P_0\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\end{aligned} \tag{4.26}$$

Substitusi persamaan (4.25) ke persamaan (4.26) diperoleh

$$\mathrm{P}(blocking)=\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\right)}\right)\left(\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)\left(\left(\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{c!}\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{1-\frac{\lambda}{\mu c}}\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c!\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}+\cancel{c!}\cancel{\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)}\frac{1}{\cancel{c!}}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\cancel{\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{\left(c!\left(1-\frac{\lambda}{\mu c}\right)\sum_{k=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c} \tag{4.27}$$

Karena rata-rata waktu penarikan/deposit adalah $H = \frac{1}{\mu}$ maka jumlah arus kas untuk semua pengguna diberikan $A = \lambda H = \frac{\lambda}{\mu}$. Persamaan (4.27) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_c^{Erlang\ C} = \frac{(A)^c}{\left(c!\left(1-\frac{A}{c}\right)\sum_{k=0}^{c-1}(A)^k \frac{1}{k!}\right)+(A)^c} \tag{4.28}$$

Sehingga pada persamaan (4.28) diperoleh probabilitas (*blocking*) semua *server* telah digunakan terhadap pelanggan yang menunggu untuk melakukan penarikan uang tunai.

4.3 Ilustrasi Numerik

Persamaan (4.17) dan (4.28) dapat diaplikasikan untuk mengelolah manajemen *excess reserves* pada Bank. Pada sistem transaksi bank pengguna dapat menempati banyak *server* yang diwakili oleh uang tunai pada waktu yang sama. Untuk mengatasi masalah ini dapat dilakukan dengan membagi jumlah total uang tunai (γL) dengan rata-rata penarikan uang tunai pada bank (ω), dan kemudian memperlakukan setiap kelebihan uang tunai sebagai satu *server* yaitu c. Notasi yang lebih tepat adalah $c = \frac{\gamma L}{\omega}$, dimana $0 \leq \gamma \leq 1$ dan L adalah liabilitas bank. Selama rata-rata waktu penarikan/deposit (H) dan laju penarikan untuk semua pengguna/*server* (λ_U) terjadi dalam waktu yang stabil, dengan $A_U = \lambda_U H$ dan $A = A_U U$, di mana A dan A_U adalah masing-masing jumlah arus kas untuk semua pengguna dan untuk satu pengguna. Akibatnya, persamaan (4.17) dan (4.28) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ B} = \frac{(A)^{\frac{\gamma L}{\omega}} \frac{1}{\frac{\gamma L}{\omega}!}}{\sum_{k=0}^{\frac{\gamma L}{\omega}} (A)^k \frac{1}{\mathrm{k}!}} \tag{4.29}$$

dan

$$P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ C} = \frac{(A)^{\frac{\gamma L}{\omega}}}{\left(\frac{\gamma L}{\omega}!\left(1 - \frac{\mathrm{A}}{\frac{\gamma L}{\omega}}\right)\sum_{k=0}^{\frac{\gamma L}{\omega}-1} (S)^k \frac{1}{k!}\right) + (A)^{\frac{\gamma L}{\omega}}} \tag{4.30}$$

Tuntutan pelanggan untuk penarikan uang tunai bersifat acak. Probabilitas pelanggan untuk menyimpan uang tunai didistribusikan secara eksponensial. Dengan demikian model Erlang-B dapat digambarkan dengan bantuan ilustrasi numerik pada bank untuk menetapkan jumlah uang tunai yang tepat dalam memenuhi tuntutan pelanggan untuk penarikan uang tunai serta untuk menetapkan jumlah uang tunai yang tepat untuk dipinjaman. Sedangkan untuk model Erlang-C digambarkan untuk menentukan probabilitas pelanggan menungggu untuk dilayani.

4.3.1 Ilustrasi Numerik Model Erlang-B:

Misalkan terdapat bank dengan laporan keuangan seperti yang ditunjukkan pada Tabel 4.1 dengan karakteristik pelanggan ditunjukkan pada Tabel 4.2. Berdasarkan jumlah uang yang disetorkan pada bank, akan ditentukan jumlah uang yang diperbolehkan untuk dipinjamkan dan total *excess reserves* yang optimal untuk disimpan, sehingga kemungkinan bahwa pelanggan diblokir dalam penarikan uang tunai sebesar satu persen ($P^{Erlang\ B}_{\frac{\gamma L}{\omega}} = 0.01$)

Tabel 4.1 Laporan keuangan bank sebelum pengelolaan *excess reserves* yang optimal.

No	Aset	Dalam Jutaan Rupiah		Dalam Jutaan Rupiah
1.	Giro Wajib Minimum	51,112,276	Liabilitas	638,903,450
2.	*Excess reserves*	587,791,174		
Jumlah		638,903,450		638,903,450

Tabel 4.2 Karakteristik pelanggan

λ_U	0.037 permintaan per hari, per pelanggan, dan per *server*
H	2.5 hari atau 60 jam
U	1,473,000 nasabah
ω	630 juta rupiah

Dalam kasus ini yang akan dicari terlebih dahulu adalah nilai dari parameter c (atau $\frac{\gamma L}{w}$) yang memenuhi persamaan (4.29) dengan kemungkinan bahwa pelanggan diblokir dalam penarikan uang tunai sebesar satu persen. Dengan demikian, menggunakan karakteristik pelanggan pada Tabel 4.2 , diperoleh

$$A_U = \lambda_U H \rightarrow A_U = 0.037x2.5 = 0.0925$$

$$A = A_U U \rightarrow A = 0.0925x1{,}474{,}000 = 136{,}345$$

Kemudian c akan dihitung dengan menggunakan program Matlab yang ditunjukkan pada Lampiran 5 sehingga diperoleh

$$c = 135{,}075$$

Dikarenakan

$c = \frac{\gamma L}{\omega}$, maka $\gamma\, L = cw = 135{,}075x630 = 85{,}097{,}250$

Loans = Aset - Giro wajib minimum - $\gamma\, L$

$= 638{,}903{,}450 - 638{,}903{,}450 - 85{,}097{,}250$

$= 502{,}693{,}924$

ini berarti cadangan uang yang harus dipelihara dibank sejumlah 85,097,250 juta rupiah dengan total *loans* yang harus digunakan adalah $502{,}693{,}924$ juta rupiah. Laporan keuangan dari *excess reserves* yang optimal ditunjukkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Laporan keuangan bank setelah pengelolaan *excess reserves* yang optimal.

No	Aset	Dalam Jutaan Rupiah		Dalam Jutaan Rupiah
1.	Giro Wajib Minimum	51,112,276	Liabilitas	638,903,450
2.	*Loans*	502,693,924		
3.	*Excess reserves*	85,097,250		
Jumlah		638,903,450		638,903,450

4.3.2 Ilustrasi Numerik Model Erlang-C:

Dalam Ilustrasi numerik model Erlang-B untuk pelanggan diblokir, keputusan terbaik untuk dilakukan seorang manager bank adalah meminta pelanggan kembali lagi nanti dengan kata lain ketika *server* sudah terpenuhi pelanggan diharapkan untuk menunggu beberapa waktu untuk mendapatkan pelayanan. Hal tersebut dapat dilakukan oleh manager bank dengan meningkatkan layanan yaitu dengan memutuskan bahwa tidak lebih dari 10% dari pelanggan diblokir harus menunggu lebih dari 15 menit untuk melakukan penarikan $\left(P(delay > 15|delay)\right)$.

Situasi pelanggan terblokir, dikarenakan laju kedatangan pelanggan berdistribusi exponensial maka

T: menunggu

λ: laju menunggu

$T \sim exp(\lambda)$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0 \quad , & \text{yang lain} \end{cases}$$

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dt$$

$$P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

untuk

$$P(T > t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$$

diperoleh

$$P(delay\ >\ t\ |\ delay)\ =\ e^{-\lambda t}$$

Pelanggan dikatakan menunggu jika total trafik (A) lebih kecil dari banyaknya pelanggan (c) atau $c - A > 0$ maka laju menunggu dapat ditulis $\lambda = \frac{c-A}{H}$.

$$P(delay > t \mid delay) = e^{\frac{-(c-A)t}{H}}$$

$$\ln P(delay > t \mid delay) = \ln(e^{-\frac{(c-A)t}{H}})$$

$$\ln P(delay > t \mid delay) = -\frac{(c-A)t}{H}$$

$$\frac{H \ln P(delay > t \mid delay)}{t} = -c + A$$

$$c = A - \frac{H \ln P(delay > t \mid delay)}{t} \tag{4.31}$$

Dengan mempertimbangkan nilai - nilai dari Tabel 4.2 untuk persamaan (4.31) diperoleh:

$$c = 136{,}345 - \frac{(60\text{x}60)\ln P(delay > 15 \mid delay)}{15}$$

$$c = 136{,}345 - \frac{(3600)\ln(0.1)}{15}$$

$$c = 136{,}898$$

dan

$$\gamma L = c\,\omega = 86{,}245{,}740$$

Dengan mensubstitusikan c ke dalam persamaan (4.30) dan dihitung dengan menggunakan Matlab yang ditunjukkan pada Lampiran 5 sehingga diperoleh $P\,(delay > 0) = 0{,}0854$. Sehingga probabilitas bahwa pelanggan menunggu lebih dari 15 menit diberikan probabilitas sebagai berikut:

$$P(delay > 0, delay > 15) = P(delay > 0)P(delay > 15 \mid delay)$$
$$= 0.0854 \times 0.1 = 0.00854$$

Sehingga dengan memutuskan bahwa tidak lebih dari 10% pelanggan menunggu lebih dari 15 menit diperoleh probabilitasnya yaitu 0.00854 jadi dengan *excess reserves* sebesar 86,245,740 juta rupiah sehingga sangat kecil kemungkinan pelanggan untuk menunggu lebih dari 15 menit dan akan kecil juga kemungkinan kerugian manajer bank yang disebabkan pelanggan meninggalkan antrean.

BAB V
KESIMPULAN

Model teori antrean Erlang-B dan Erlang-C yang pada umumnya diterapkan pada sistem lalulintas sekarang dapat disesuaikan dengan masalah yang dihadapi oleh bank untuk pendekatan yang lebih efektif dalam pengelolaan jumlah *excess reserves* yang optimal. Berdasarkan pembahasan yang telah disampaikan pada bab sebelumnya telah diperoleh model antrean sebagai berikut:

1. Model antrean Erlang-B (*M/M/C/C*) yaitu pobabilitas terdapat *server* yang sibuk atau *server* sedang digunakan yang dirumuskan dengan $P_c^{Erlang\ B} = \frac{(A)^c \frac{1}{c!}}{\sum_{k=0}^{c} (A)^k \frac{1}{k!}}$, kemudian setelah disesuaikan dengan masalah yang dihadapi oleh bank diperoleh persamaan baru yaitu $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ B} = \frac{(A)^{\frac{\gamma L}{\omega}} \frac{1}{\frac{\gamma L}{\omega}!}}{\sum_{k=0}^{\frac{\gamma L}{\omega}} (A)^k \frac{1}{k!}}$. Sedangkan Model antrean Erlang-C (*M/M/C/∞*) yaitu probabilitas terdapat *server* yang sibuk dan probabilitas pelanggan yang menunggu untuk dilayani atau peluang yang dirumuskan dengan $P_c^{Erlang\ C} = \frac{(A)^c}{\left(c!\left(1-\frac{A}{c}\right)\sum_{k=0}^{c-1}(A)^k \frac{1}{k!}\right)+(A)^c}$, serta disesuaikan dengan masalah yang dihadapi oleh bank diperoleh $P_{\frac{\gamma L}{\omega}}^{Erlang\ C} = \frac{(A)^{\frac{\gamma L}{\omega}}}{\left(\frac{\gamma L}{\omega}!\left(1-\frac{A}{\frac{\gamma L}{\omega}}\right)\sum_{k=0}^{\frac{\gamma L}{\omega}-1}(S)^k \frac{1}{k!}\right)+(A)^{\frac{\gamma L}{\omega}}}$.
2. Dengan menerapkan model antrean Erlang-B pada ilustrasi numerik diperoleh *excess reserves* yang optimal yaitu 85,097,250 juta rupiah dengan jumlah *loans* yang optimal yaitu 502,693,924 juta rupiah. Sedangkan penerapan model antrean Erlang-C diperoleh *excess reserves* yang optimal yaitu 86,245,740 juta rupiah serta dengan memutuskan bahwa tidak lebih dari 10% pelanggan menunggu lebih dari

15 menit diperoleh probabilitasnya yaitu 0.00854, sehingga sangat kecil kemungkinan pelanggan untuk menunggu lebih dari 15 menit dan akan kecil juga kemungkinan kerugian manajer bank yang disebabkan pelanggan meninggalkan antrean.

DAFTAR PUSTAKA

Aminudin. 2005. Prinsip-prinsip Riset Operasi.Erlangga.Jakarta.

Anonimous. 1998. *Undang-Undang Republik Indonesia Tentang Perbankan. Nomor 10 /1998*

Bolch, G., S. Greiner, H.D. Meer, dan K.S. Trivedi. 2006. *Queueing Networks and Markov Chains*. Second Ed. John Willey dan Sons, Inc. New Jersey.

Budisantoso, Totok dan Sigit Triandaru. 2006. Bank dan Lembaga Keuangan Lain. Edisi 2. Jakarta.Salemba Empat.

Cleiton Taufemback dan Sergio Da Silva.2012. Queuing Theory Applied To The Optimal Management Of Bank Excess Reserves. *Physica A .391 : 1381–1387.*

Daigle, J.N. 2005. *Queueing Theory with Applications to Packet Telecommunication*. Springer dan Business Media, Inc. New York.

H.C.Tijms.2013.*A First Course in Stochastic Models*. John Wiley & Sons, Ltd.New York.

Hadori,H.L.B, dkk.2002.*Studi Keuangan Bantuan Likuiditas Bank Indonesia*. Grant Thornton Indonesia.Jakarta.

Heizer,J dan Render, B. 2004. *Operation Management*.Salemba Empat.Jakarta.

Mulyono, S. 2017. *Riset Operasi*. Edisi Kedua.Mitra Wacana Media. Jakarta.

Mulyono,S.1991.*Operations Research*.Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.

P.A. Frost.1971. Banks' demand for excess reserves, *Journal of Political Economy*.805-825.

Prawirosentono, Suyadi. 2005. *Riset Operasi dan Ekonofisika*. BumiAksara.Jakarta.

Supranto, 2008. *Statistik Teori dan Aplikasi*.Erlangga.Jakarta.

Subagyo,A.P.,M. Handoko,dan T. Hani.1991. *Dasar-Dasar Operations Research*.BPFE. Yogyakarta.

Taha,H.A.1997. *Riset Operasi*. Jakarta: Binarupa Aksara.

Taha,H.A.2007. *Operation Research: An Introduction*.Eight Edition. Pearson Education Inc. New Jersey.